



Questão 1

(1) Seja A uma matriz $n \times n$, real, então deverá existir matrizes V e J , tais que

$$A = V J V^{-1}$$

Com $V = [v_{11} \ v_{12} \ \dots \ v_{1n_1} \ \dots \ v_{k1} \ \dots \ v_{kn_k}]$, tal que $\{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Valendo ainda que W_i é um espaço A -invariante, com base $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in_i}\}$ de tal forma que exista $k_i \leq n_i$ satisfazendo

$$(\lambda_i I - A)^{k_i} \cdot v_{ij} = \vec{0}; \quad \forall j = 1, \dots, n_i$$

Nota-se que tais v_{ij} são autovetores generalizados dos autovalores λ_i , para $i = 1, \dots, k$.
E ainda n_i é a multiplicidade da raiz λ_i do polinômio característico de A .



É a matriz J tem a seguinte caracteri-
zação

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1, l_1}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{n_2, l_2}(\lambda_2) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{n_k, l_k}(\lambda_k) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J_{n_k, l_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

Com $J_{n_i, l_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, l_i$

denominado bloco de jordan, e l_i a quantidade de blocos de jordan com respeito ao autovalor λ_i .



$$(2) \text{ Como } \det(tI - A) = t^5 - 2t^3a + a^2t \\ = t[t^4 - 2t^2a + a^2] \\ = t(t - \sqrt{a})^2(t + \sqrt{a})^2$$

então os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \sqrt{a}$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{a}$$

Se tomarmos

$$\dim(\ker(\lambda_i I - A)) = d_i$$

Teremos então se $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, temos
 A diagonalizável e portanto

$$A = V J V^{-1}; \quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \lambda_3 & \\ & & & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Se $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, então

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Se $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 1$, então

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

e por fim, se $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 1$, temos

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Em ambos os casos existe V , tal que

$$A = V J V^{-1}, \text{ pelo Teorema da forma canônica de Jordan.}$$



(3) Como B é tal que $\det(\lambda I - B) = (\lambda - \lambda)^n$
temos então que existe $V \in \mathbb{C}^n$, tal que

$$B = V J V^{-1}$$

Com J formado por blocos de Jordan da
forma:

~~$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$~~

$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

e portanto, como

$$J_{n_i}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot J_{n_i}(\lambda)$$



então, como $B = VJV^{-1} \Rightarrow B^{-1} = VJ^{-1}V^{-1}$
e pela observação anterior,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} J_{n_1}^{-1}(\lambda) & & 0 \\ & J_{n_2}^{-1}(\lambda) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{n_k}^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}$$

com $J_{n_i}^{-1}(\lambda)$ definido como $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ (-1)^{i+j} & & 1 \end{pmatrix}$

assim, podemos concluir que

$$\lambda I - B^{-1} = \cancel{V} \lambda I V^{-1} - V J^{-1} V^{-1} = V (\lambda I - J^{-1}) V^{-1}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(V) \cdot \det(\lambda I - J^{-1}) \cdot \det(V^{-1}) \\ &= \det(V) \cdot \det^{-1}(V) \det(\lambda I - J^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - J^{-1}) \end{aligned}$$



É como, $\lambda I_n - J_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$; $I_{n_1} = \text{Identidade}$
 $n_1 \times n_1$

Concluimos que

$$\text{Det}(\lambda I - B^{-1}) = \text{Det}(\lambda I - J^{-1}) = (\lambda - 1)^n$$

e portanto B e B^{-1} possuem o mesmo polinômio característico, o que implica que B é similar a B^{-1} . $\square$



Questão 2

Teorema Green

Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 e uma curva C com orientação positiva, então se a curva C é parametrizada por $\chi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, então

$$\int_C \text{rot}(F) dx = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (f_1 dx + f_2 dy)$$

Com $\chi_0 = (x_0, y_0) = \chi(0)$
 $\chi_1 = (x_1, y_1) = \chi(1)$

~~Logo, a integral é calculada em $\mathbb{R}^2$ e não em $\mathbb{R}$.~~

Teorema Stokes

Seja S uma superfície e fronteira ∂S com a orientação induzida pelo espaço, se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação C^1 , então

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot \eta_s ds = \int_{\partial S} F \cdot d\eta_s$$



Teorema de Gauss (Divergência)

Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 e V um domínio com fronteira ∂V , podemos aplicar também para ~~superfícies~~ com fronteira, então

$$\iiint_V \nabla \cdot F \, dV = \iint_{\partial V} F \cdot d\eta_v$$

(2) Desse último Teorema (Gauss) podemos tomar $F = \nabla u$, e portanto como

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \Delta u,$$

Concluimos que

$$\iint_{\partial V} \nabla u \cdot d\eta_v = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla u) \, dV$$

$$= \iiint_V \Delta u \, dV$$

Jm



(3) Como $R = [n_1, n_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$
temos d

$$\iint_R \nabla u d\eta = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial n} (n_2, \varphi, \theta) d\varphi d\theta$$

$$- \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial n} (n_1, \varphi, \theta) d\varphi d\theta$$

$$+ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} (n, \varphi_2, \theta) dn d\theta$$

$$- \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} (n, \varphi_1, \theta) dn d\theta$$

$$+ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} (n, \varphi, \theta_2) dn d\varphi$$

$$- \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} (n, \varphi, \theta_1) dn d\varphi$$

~~Como $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta$~~



Questão 2

(3) Cont.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} =$$
$$\vdots$$

Questão 3

(1) Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ Variáveis aleatórias independentes, com média das distribuições m e Variância σ^2 , então temos a seguinte convergência no sentido das distribuições:

$$\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \rightarrow N(0, 1)$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(2) Tomando f_x como função característica
fica com relação a cada X_x ...